Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Üben**	**X**	**Prismen und Zylinder**	**1401**

1. Entscheide begründend:
   a) Gibt es Prismen mit 21 Ecken?
   b) Gibt es Prismen mit 32 Kanten?
   c) Kann es ein Prisma mit 17 Flächen geben?

2. Bestimme je einen Term, der die Anzahl der Kanten bzw. Flächen eines Prismas in Abhängigkeit von der Eckenzahl E der Grundfläche angibt!

(Vgl. Cornelsen: Fokus Mathematik 9 Seite 59 / Nr. 12)

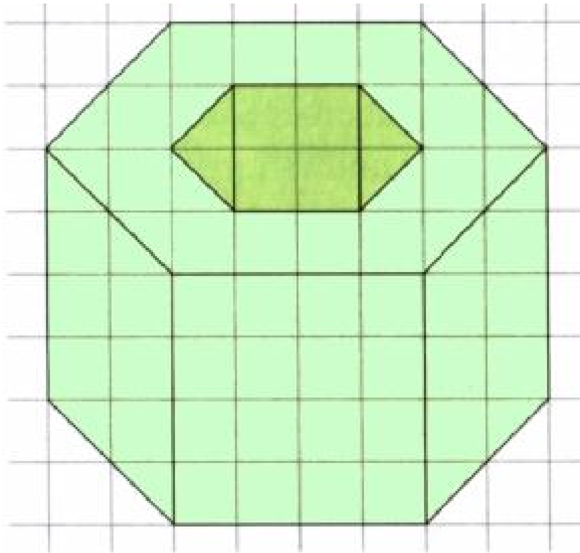
Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Lösung**	**X**	**Prismen und Zylinder**	**1401**

1. Die Eckenzahl eines Prismas ist gerade (Grund- und Deckfläche haben gleich viele Ecken!), daher gibt es kein Prisma mit 21 Ecken. Die Anzahl der Kanten ist dreimal so groß wie die Eckenzahl (gleich viele Kanten an der Grund- wie Deckfläche und ebenso viele Seitenkanten), also gibt es auch kein Prisma mit 32 Kanten. Prismen mit 17 Flächen gibt es, denn neben Grund- und Deckfläche kann es 15 Seitenflächen haben, wenn die Grundfläche ein 15-Eck ist.

2. Anzahl der Kanten = 3E
   Anzahl der Flächen = 2 + E

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Üben**	**XX**	**Prismen und Zylinder**	**1402**

Berechne Volumen und Oberfläche des abgebildeten Prismas! Die Seitenkanten sind dabei alle gleich lang.
(Hinweis: auch die inneren Flächen gehören zur Oberfläche!)
Ein Kästchen ist dabei eine Einheit.



(Vgl. Cornelsen: Fokus Mathematik 9 Seite 59 / Nr. 14)

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Lösung**	**XX**	**Prismen und Zylinder**	**1402**

Länge außen: a = 4, Länge innen: s = 2, Höhe h = 4

$$A_{Sech\,sec\,k} = 6 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

großes Sechseck: $A_1 = 41{,}57$ kleines Sechseck: $A_2 = 10{,}39$

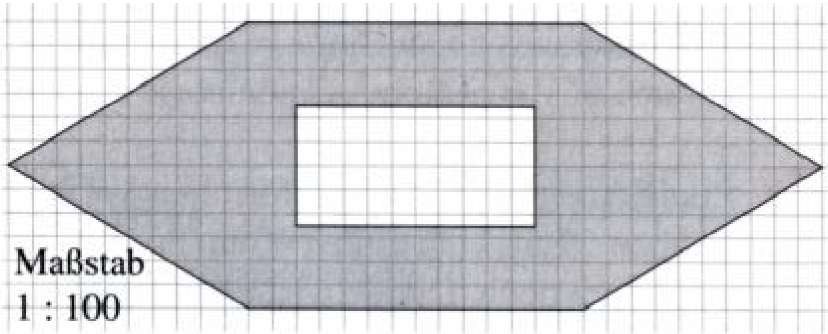
$V = A_1 \cdot h - A_2 \cdot h = (A_1 - A_2) \cdot h = (41{,}57 - 10{,}39) \cdot 4 = 124{,}72$

$O = 6 \cdot A_{\text{Rechteck außen}} + 6 \cdot A_{\text{Rechteck innen}} + 2 \cdot (A_1 - A_2) =$

$= \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 + 6 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot (41{,}57 - 10{,}39) = 206{,}36$

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Üben**	**XX**	**Prismen und Zylinder**	**1403**

Ein Betonpfeiler hat die abgebildete Querschnittsfläche. Berechne die Masse des Pfeilers, wenn er insgesamt 7,5 m hoch ist, der Hohlraum aber nur 5,5 m hoch ist. 2 Kästchen seien dabei 1 cm. Die Dichte von Beton ist 2,8 $\frac{kg}{dm^3}$



(Vgl. Cornelsen: Fokus Mathematik 9 Seite 158 / Nr. 15)

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Lösung**	**XX**	**Prismen und Zylinder**	**1403**

Aufteilung in zwei dreieckige Prismen und einen Quader; davon muss ein zweiter Quader abgezogen werden.

$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_{\Delta} \cdot h_P = \frac{1}{2} \cdot 6m \cdot 6m \cdot 7{,}5m = 135m^3$

$V_{Gesamtquader} = l \cdot b \cdot h = 7m \cdot 6m \cdot 7{,}5m = 315m^3$

$V_{hohlerQuader} = 5m \cdot 2{,}5m \cdot 5{,}5m = 68{,}75m^3$

$V_{gesamt} = 516{,}25\ m^3$

$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V = 2{,}8 \frac{t}{m^3} \cdot 516{,}25m^3 = 1445{,}5\ t$

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Üben**	**XX**	**Prismen und Zylinder**	**1404**

Berechne die fehlenden Größen für einen Zylinder:

	a)	**b)**	**c)**
Radius r	4 cm	5 cm	
Höhe h	6 cm		
Mantelfläche M			240π cm^2
Oberfläche S		80π cm^2	312π cm^2
Volumen V			

Stelle dazu Volumen und Oberfläche ebenfalls als Vielfache von π dar!

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Lösung**	**XX**	**Prismen und Zylinder**	**1404**

	a)	**b)**	**c)**
Radius r	4 cm	5 cm	**6cm**
Höhe h	6 cm	**3 cm**	**20cm**
Mantelfläche M	**48p cm^2**	**30p cm^2**	240π cm^2
Oberfläche S	**80p cm^2**	80π cm^2	312π cm^2
Volumen V	**96p cm^3**	**45p cm^3**	**720p cm^3**

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Üben**	**XX**	**Prismen und Zylinder**	**1405**

1. Litfasssäule
Welche Fläche kann auf einer Plakatsäule beklebt werden, wenn sie 2,50 m hoch ist und einen Umfang von 4 m besitzt?

2. Regentonne
Eine oben offene Regentonne aus dünnem Blech fasst 800 Liter, ihre Höhe ist doppelt so groß wie ihr Durchmesser. Berechne den Radius der Tonne.

[Aus: Ehrenwirth: Anschauliche Geometrie: S.60 Nr. 5]

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Lösung**	**XX**	**Prismen und Zylinder**	**1405**

1. *Lösung Litfasssäule*
   Es kann eine Fläche von 10m² beklebt werden.

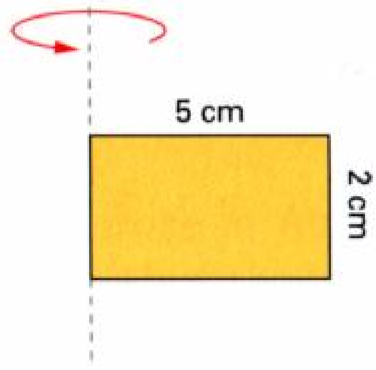
2. *Lösung Regentonne:*
   Die Regentonne hat einen Radius von 40 cm.

Rechnung:

$$\text{Zylinder}: \quad V = r^2 \pi h = 800\,\text{dm}^3$$
$$h = 2d = 4r \quad \text{einsetzen}$$
$$\Rightarrow \quad V = r^2\pi(4r) = r^3 4\pi$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{800\text{dm}^3}{4\pi}} = 3{,}9929\,\text{dm} \approx 40\ \text{cm}$$

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Üben**	**XX**	**Prismen und Zylinder**	**1406**

Welcher Körper entsteht, wenn du ein Rechteck um eine seiner Seiten rotieren lässt?
Berechne die Oberfläche für den abgebildeten Fall und vergleiche mit dem Fall, dass das Rechteck um die 5 cm lange Seite rotiert.
Um wie viel Prozent ist die Oberfläche im abgebildeten Fall größer bzw. kleiner als die Oberfläche im anderen Fall?



(Vgl. bsv Mathematik 9 Seite 187 / Nr. 13)

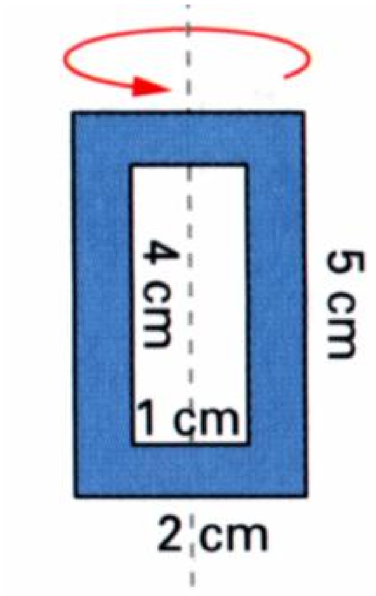
Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Lösung**	**XX**	**Prismen und Zylinder**	**1406**

Bei der Rotation entsteht ein Zylinder.

Rotation wie in Zeichnung: r = 5 cm, h = 2 cm
$O_1 = 2 \cdot (5\text{ cm})^2 \cdot \pi + 2 \cdot 5\text{ cm} \cdot \pi \cdot 2\text{ cm} = 75\pi\text{ cm}^2$
andere Rotation: r = 2 cm, h = 5 cm
$O_2 = 2 \cdot (2\text{ cm})^2 \cdot \pi + 2 \cdot 2\text{ cm} \cdot \pi \cdot 5\text{ cm} = 28\pi\text{ cm}^2$
Im abgebildeten Fall ist die Oberfläche um $47\pi\text{ cm}^2$; das sind 168 %

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Üben**	**XX**	**Prismen und Zylinder**	**1407**

Beschreibe den Körper, der durch Rotation der gezeichneten Figur um die eingezeichnete Achse entsteht. Berechne sein Volumen und seine Oberfläche (innen und außen).



(Vgl. bsv Mathematik 9 Seite 187 / Nr. 13)

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Lösung**	**XX**	**Prismen und Zylinder**	**1407**

Es handelt sich um einen Zylinder mit einem zylinderförmigen Hohlraum.

$V = V_z(r = 1; h = 5) - V_Z(r = 0{,}5; h = 4) = 1 \cdot \pi \cdot 5 - 0{,}5^2 \cdot \pi \cdot 4 = 5\pi - \pi = 4\pi \approx 12{,}6\ (cm^2)$

$O = 2 \cdot F_{Kr}(r = 1) + 2 \cdot F_{Kr}(r = 1) + M_z(r = 1; h = 5) - M_Z(r = 0{,}5; h = 4) =$

$= 2\pi + 0{,}5\pi + 2\pi \cdot 5 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot \pi \cdot 4 = 2\pi + 0{,}5\pi + 10\pi + 4\pi = 16{,}5\pi \approx 51{,}8\ (cm^3)$

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Üben**	**XXX**	**Prismen und Zylinder**	**1408**

Ein Rechteck mit den Seiten x und y rotiert einmal um x und einmal um y und erzeugt so jedes mal einen Zylinder. Berechne die Verhältnisse der Volumina, der Mantelflächen und der Oberflächen dieser Zylinder in Abhängigkeit von x und y.

(Hinweis: Mach dir eine Skizze. Solltest du mit der allgemeinen Rechnung Schwierigkeiten haben, so verwende für x = 10 cm und y = 20 cm)

[Aus: Ehrenwirth: Anschauliche Geometrie: S.59 Nr. 2]

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Lösung**	**XXX**	**Prismen und Zylinder**	**1408**

Rotation um Seite x: r = y, h = x

Volumen $V_1 = y^2\pi x$ Mantelfläche $M_1 = 2y\pi x$ Oberfläche $S_1 = 2y^2\pi + 2y\pi x$

Rotation um Seite y: r = x, h = y

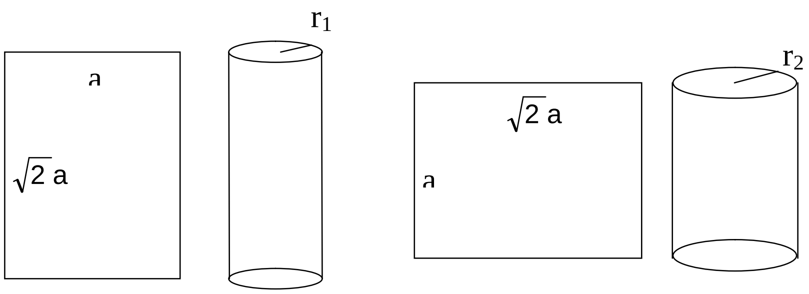
Volumen $V_2 = x^2\pi y$ Mantelfläche $M_2 = 2x\pi y$ Oberfläche $S_2 = 2x^2\pi + 2x\pi y$

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{y}{x}$ $\frac{M_1}{M_2} = 1$ $\frac{S_1}{S_2} = \frac{y^2 + xy}{x^2 + xy} = \frac{y(y+x)}{x(x+y)} = \frac{y}{x}$

(Für x = 10 und y = 20 ergibt sich: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{1}$ $\frac{M_1}{M_2} = 1$ $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{1}$)

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Üben**	**XXX**	**Prismen und Zylinder**	**1409**

Ein Blatt Papier im DIN-Format (Seitenlängen a und $\sqrt{2}\cdot$a) lässt sich auf zwei Arten zu einem Zylindermantel biegen. Es entstehen dabei ein „kurzer dicker“, bzw. ein „langer dünner“ Zylinder.



a) Berechne Umfang und Radius der beiden Zylinder in Abhängigkeit von a.

b) Berechne das Volumen der beiden Zylinder in Abhängigkeit von a.
Welcher Zylinder hat das kleinere Volumen ? Um wie viel Prozent ist es kleiner, als das des anderen Zylinders ?

c) Berechne die Oberflächen in Abhängigkeit von a. Um wie viel Prozent ist die Oberfläche des einen größer als die des anderen ?.

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Lösung**	**XXX**	**Prismen und Zylinder**	**1409**

a) Zylinder1: $u_1 = a \Rightarrow r_1 = \frac{a}{2\pi}$ Zylinder2: $u_2 = a\sqrt{2} \Rightarrow r_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2\pi}$

b) $V_1 = \frac{a^2}{4\pi^2}\cdot\pi\cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4\pi}$ $V_2 = \frac{2a^2}{4\pi^2}\cdot\pi\cdot a = \frac{a^3}{2\pi}$ $\Rightarrow V_1 < V_2$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4\pi}\cdot\frac{2\pi}{a^3} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = 0{,}707 \Rightarrow V_1 \text{ ist um 29,3 \% kleiner als } V_2$$

c) $S_1 = 2\cdot\frac{a^2}{4\pi^2}\cdot\pi + 2\cdot\frac{a}{2\pi}\cdot\pi\cdot a\sqrt{2} = a^2\left(\frac{1}{2\pi}+\sqrt{2}\right)$

$$S_2 = 2\cdot\frac{2a^2}{4\pi^2}\cdot\pi + 2\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2\pi}\cdot\pi\cdot a = a^2\left(\frac{1}{\pi}+\sqrt{2}\right) \Rightarrow S_2 \text{ ist größer als } S_1$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{\pi}+\sqrt{2}}{\frac{1}{2\pi}+\sqrt{2}} = 1{,}101 \Rightarrow S_2 \text{ ist um 10,1 \% größer als } S_1$$

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Üben**	**XX**	**Prismen und Zylinder**	**1410**

Durch einen Würfel wird ein zylinderförmiges Loch parallel zu einer Würfelkante gebohrt. Wie viel Prozent der Kantenlänge a beträgt der Lochradius r, wenn der Würfel dann nur noch halb so schwer ist?

[nach: Ehrenwirth: Anschauliche Geometrie: S.60 Nr. 12]

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Lösung**	**XX**	**Prismen und Zylinder**	**1410**

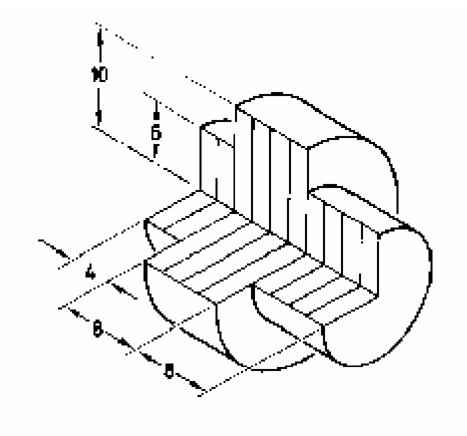
Da die Masse m direkt proportional zum Volumen ist, ist das Zylindervolumen halb so groß wie das Würfelvolumen.

$$V_Z = \tfrac{1}{2} V_W \quad \Rightarrow \quad r^2\pi \cdot a = \tfrac{1}{2} a^3 \quad \Rightarrow \quad r^2 = \tfrac{1}{2\pi} a^2$$

$$r = \sqrt{\tfrac{1}{2\pi}} \cdot a = 0{,}399a \quad \Rightarrow$$

Der Radius muss etwa 40 % der Kantenlänge des Würfels betragen.

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Üben**	**XX**	**Prismen und Zylinder**	**1411**



Die Skizze zeigt einen rotationssymmetrischen Körper, der zur besseren Übersicht aufgeschnitten dargestellt ist. Berechne aus den Angaben der Zeichnung Volumen und Oberfläche des Körpers.
(Beim Ergebnis kann die Zahl π stehen gelassen werden. Die Rechnung erfolgt ohne Einheiten.)

[Aus: Ehrenwirth: Anschauliche Geometrie: S.61 Nr. 16a]

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Lösung**	**XX**	**Prismen und Zylinder**	**1411**

$V = V_{Z1}(r = 6; h = 4) + V_{Z2}(r = 10; h = 8) + V_{Z3}(r = 6; h = 8) =$

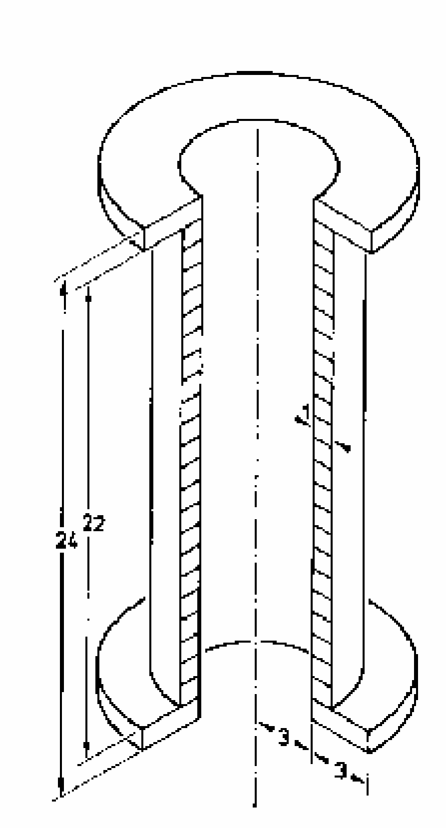
$= 144\pi + 800\pi + 288\pi = 1232\pi$ (Volumeneinheiten)

$S = M_{Z1}(r = 6; h = 4) + M_{Z2}(r = 10; h = 8) + M_{Z3}(r = 6; h = 8) + 2 \cdot F_{Kr}(r = 10) =$

$= 48\pi + 160\pi + 96\pi + 200\pi = 504\pi$

(Anmerkung: Die beiden Kreisflächen mit r = 6 und die beiden Kreisringe im Mittelteil ergeben zusammen zwei Kreisflächen mit r = 10.)

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Üben**	**XXX**	**Prismen und Zylinder**	**1412**



Die Skizze zeigt einen rotationssymmetrischen Körper, der zur besseren Übersicht aufgeschnitten dargestellt ist. Berechne aus den Angaben der Zeichnung Volumen und Oberfläche des Körpers.
(Beim Ergebnis kann die Zahl π stehen gelassen werden. Die Rechnung erfolgt ohne Einheiten)

[Aus: Ehrenwirth: Anschauliche Geometrie: S.61 Nr. 16d]

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Lösung**	**XXX**	**Prismen und Zylinder**	**1412**

$V = 2 \cdot V_{Z1}(r = 6; h = 1) + V_{Z2}(r = 4; h = 22) - V_{Z3}(r = 3; h = 24) =$

$= 72\pi + 352\pi - 216\pi = 208\pi$ (Volumeneinheiten)

$S = 2 \cdot M_{Z1}(r = 6; h = 1) + M_{Z2}(r = 4; h = 22) + M_{Z3}(r = 3; h = 24) +$

$+ 2 \cdot (F_{Kr}(r = 6) - F_{Kr}(r = 3) + F_{Kr}(r = 6) - F_{Kr}(r = 4)) =$

$= 24\pi + 176\pi + 144\pi + 2 \cdot (36\pi - 9\pi + 36\pi - 16\pi) = 344\pi + 94\pi = 438\pi$ (LE)

(Die Oberfläche setzt sich zusammen aus den beiden äußeren Zylindermänteln und dem Mantel des ausgefrästen Zylinders sowie zwei Kreisringen unten bzw. an der Abstufung außen.)

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Üben**	**XX**	**Prismen und Zylinder**	**1413**

a) Ein zylinderförmiges Saftglas hat einen Durchmesser von 4,6 cm. In welcher Höhe muss sich die Markierung für 0,2 l befinden?

b) Gießt man den Saft in ein anderes zylinderförmiges Glas, so wird es bis zu einer Höhe von 6 cm gefüllt. Welchen Umfang hat dieses Glas?

c) Für eine Feier stehen auch Kristallgläser in Form sechsseitiger Prismen zur Verfügung, deren Grundfläche regelmäßige Sechsecke sind. Wie lang muss ihre Grundkante sein, damit der Saft dort ebenfalls bis zu einer Höhe von 6 cm steht?

(Vgl. bsv Mathematik 9 Seite 187 / Nr. 12)

Klasse	Art	Schwierigkeit	math. Thema	Nr.
9	**Lösung**	**XXX**	**Prismen und Zylinder**	**1413**

a) $V = r^2\pi h \Rightarrow h = \frac{V}{r^2\pi} = \frac{200\text{cm}^3}{(2{,}3\text{cm})^2\pi} = 12{,}0\text{cm}$

b) $V = r^2\pi h \Rightarrow r = \sqrt{\frac{V}{h\pi}} = \sqrt{\frac{200\text{cm}^3}{6\text{cm}\cdot\pi}} = 3{,}26\text{cm} \Rightarrow u = 20{,}5\text{cm}$

c) $G = \frac{V}{h} = \frac{200\text{cm}^3}{6\text{cm}} = 33{,}3\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad A_\Delta = \frac{G}{6} = 5{,}56\text{cm}^2$

$$A_\Delta = \tfrac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{4\cdot A_\Delta}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4\cdot 5{,}56\text{cm}^2}{\sqrt{3}}} = 3{,}6\text{cm}$$